यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» ज्यामिति का अर्थ और उद्गम

» मिस्र और सिन्धु घाटी में व्यावहारिक ज्यामिति

» सुल्बासूत्र, वेदियाँ और ज्यामिति का अव्यवस्थित विकास

» थेल्स, पाइथागोरस और यूक्लिड के एलीमेंट्स

» ठोस से बिंदु तक - विमाएँ और यूक्लिड की परिभाषाएँ

» अपरिभाषित पद, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ

» यूक्लिड के अभिगृहीत और पाँच अभिधारणाएँ

» साध्य, प्रमेय और यूक्लिड के उदाहरण

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. 'ज्यामिति' शब्द के दो Greek roots लिखो और बताओ कि इनका अर्थ क्या है। इससे geometry के उद्गम के बारे में क्या hint मिलता है?

› Roots identify करो: geo और metrein

› अर्थ लिखो: geo = पृथ्वी/भूमि; metrein = मापना

› Conclude: geometry का उद्गम ज़मीन मापने की ज़रूरत से जुड़ता है

उत्तर – Geo = पृथ्वी/भूमि, Metrein = मापना; इससे hint मिलता है कि geometry का उद्गम भूमि मापने की आवश्यकता से हुआ।

उदाहरण 2. सिन्धु घाटी की ईंट का अनुपात लम्बाई:चौड़ाई:मोटाई = 4:2:1 है। अगर मोटाई 5 cm हो, तो लंबाई और चौड़ाई कितनी होगी?

› Ratio 4:2:1 में मोटाई = 1 part = 5 cm

› चौड़ाई = 2 parts = 10 cm

› लंबाई = 4 parts = 20 cm

उत्तर – लम्बाई = 20 cm, चौड़ाई = 10 cm, मोटाई = 5 cm

उदाहरण 3. श्रीयंत्र में कितने समद्विबाहु त्रिभुज अंतर्निहित हैं और उनसे कितने छोटे त्रिभुज बनते हैं? यह किस ग्रंथ/परंपरा से जुड़ा है?

› Source recall: श्रीयंत्र में 9 समद्वबिाहु त्रभिुज

› उनसे 43 छोटे (गौण) त्रिभुज बनते हैं

› यह अथर्ववेद/Vedic geometry और सुल्बासूत्र context से जुड़ा है

उत्तर – 9 समद्विबाहु त्रिभुज; उनसे 43 छोटे त्रिभुज बनते हैं – वैदिक/अथर्ववेद श्रीयंत्र संदर्भ।

उदाहरण 4. Match करो: (a) Thales (b) Pythagoras (c) Euclid – उनकी मुख्य देन के साथ। Euclid के Elements में कितनी पुस्तिकाएँ हैं?

› Thales पहली ज्ञात उपपत्ति: diameter circle को bisect करता है

› Pythagoras कई geometric गुण/सिद्धांत develop

› Euclid Elements, 13 books, organised known mathematics

उत्तर – (a) First known proof (diameter bisects circle); (b) Developed many geometric properties; (c) Elements in 13 books. Elements = 13 पुस्तकिएँ।

उदाहरण 5. Neeche diye objects ki dimensions batao: (i) ek cuboid wooden block (ii) uska ek face (iii) face ki ek edge (iv) edge ka ek endpoint.

› Cuboid block = solid = 3 dimensions

› Face = surface = 2 dimensions

› Edge = line = 1 dimension; endpoint = point = 0 dimension

उत्तर – (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

उदाहरण 6. क्यों mathematicians 'बिंदु' को undefined term मानते हैं? Euclid की definition की समस्या से explain करो।

› Euclid: point वह है जिसका कोई भाग नहीं

› 'भाग' को define करने पर 'क्षेत्र' etc. चाहिए – chain infinite हो सकती है

› इसलिए point, line, plane को undefined रखना convenient और better intuitive feel देता है

उत्तर – क्योंकि परिभाषा में 'भाग' जैसे पद फिर परिभाषित करने पड़ते हैं और अंतहीन श्रृंखला बन सकती है; अतः बिंदु, रेखा, तल अपरिभाषित रखे जाते हैं।

उदाहरण 7. Points A और B दिए हैं। कितनी distinct सीधी lines A और B दोनों से गुज़र सकती हैं? कौनसा axiom/postulate use होगा?

› Postulate 1 से कम-से-कम एक line possible

› Euclid ने uniqueness मानी – Axiom 5.1: दो distinct points से unique line

› इसलिए exactly one line – line AB

उत्तर – केवल एक अद्वितीय रेखा (AB) – अभिगृहीत 5.1 के अनुसार।

उदाहरण 8. Line पर points P, Q, R हैं; Q, P और R के बीच है; PQ = 3.2 cm, QR = 4.8 cm। PR कितना है? कौनसा Euclid axiom idea use होता है?

› Q between P and R PQ + QR = PR (Example 1 style)

› PR = 3.2 + 4.8 = 8.0 cm

› Reason: PQ + QR segment PR से coincident; Axiom 4 – coincident things are equal

उत्तर – PR = 8.0 cm; संपाती वस्तुएँ बराबर होती हैं (अभिगृहीत 4) / रेखाखंड योग।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• 1-mark में अक्सर पूछा जाता है – geometry के Greek roots और उनका अर्थ। Exact words लिखो: geo = पृथ्वी/भूमि, metrein = मापना।

• Brick ratio 4:2:1 और truncated pyramid volume formula जानने की बात – दोनों short-answer favourites हैं। Exact ratio याद रखो।

• Comparison question आए तो 'results/statements vs processes/proofs' वाला contrast clearly लिखो – examiner इसी point को ढूँढता है।

• Names + one contribution each लिखिना 3-mark question बन जाता है। 'Elements has 13 books' ज़रूर include करो।

• Definitions को word-to-word close लिखो – 'चौड़ाई रहति लम्बाई' और 'कोई भाग नहीं' जैसे phrases marks दिलाते हैं।

• 'Why undefined terms?' वाला reasoning question common है – infinite chain of definitions argument ज़रूर लिखो।

• Postulate 1 और Axiom 5.1 का अंतर exam में trap है – 'at least one' vs 'unique' clearly लिखो।

• Proof questions में 'Given / To Prove / Construction / Proof' headings use करो; हर step के साथ axiom/postulate number लिखो – full marks का formula।

एक नज़र में रिवीज़न

› Geo + Metrein = Earth-measuring; geometry began from practical land measurement needs across ancient civilizations.

› Misr = Neel floods + pyramids/volume; Sindhu = parallel streets + bricks 4:2:1 (~3000 BCE).

› Sulbasutra ~800-500 BCE; Shriyantra 943 triangles; shift = practical statements Greek deductive checking.

› Thales = diameter bisects circle (first proof); Pythagoras 572 BCE; Euclid 300 BCE, Elements = 13 books.

› 3D-2D-1D-0D chain; Point = no part; Line = breadthless length; Plane lies evenly with straight lines on itself.

› Undefined = point, line, plane; Postulates geometry-specific; Axioms general notions; Consistent system + 465 propositions.

› Same-type magnitudes only; Axiom 5.1 = unique line through two distinct points; Postulate 5 = interior angles sum < 180° lines meet that side.

› Ex.1: between-point segment sum via coincidence (Axiom 4); Ex.2: two circles (Postulate 3) equilateral AB=AC=BC.